Cours 13 – 30/10/2024

6. Travail; Energie; Principes de conservation

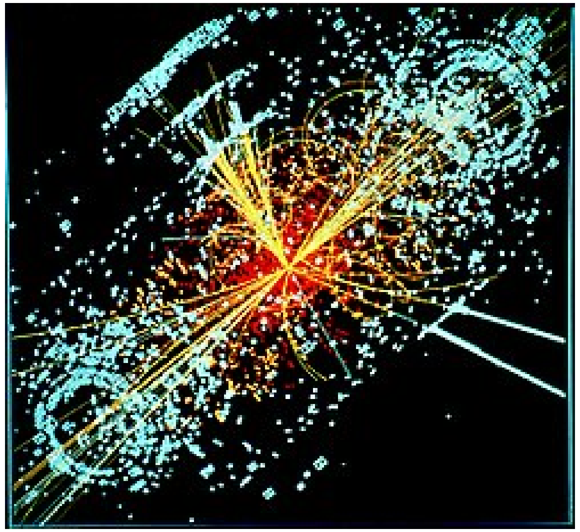
6.7. Force non-conservative

6.8. Force conservative et « gradient »

7. Chocs

7.1. Centre de masse

7.2. Chocs élastiques

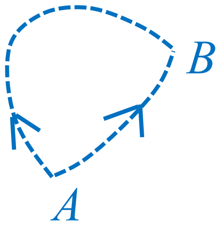


LHC-CERN, particle collision

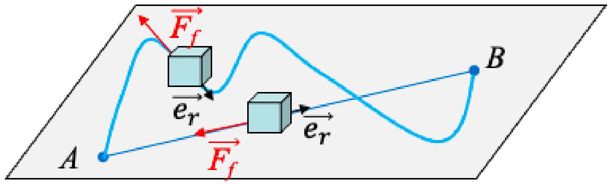
6.7. Force non-conservative

Cas d'une force de frottement

L'énergie mécanique $E = E_c + E_p$ d'un système n'est plus constante lorsque celui-ci est soumis à une force de frottement.



Le travail de la force de frottement entre A et B est différent pour les deux trajets : $(E_B - E_A)_{trajet\ 1} \neq (E_B - E_A)_{trajet\ 2}$



Démonstration :

$$W_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{F_f} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -\mu_c mg\overrightarrow{e_r} \cdot dr\overrightarrow{e_r} = -\mu_c mg\, L_{A\to B}$$

avec $L_{A\to B}$ la longueur totale parcourue ➡ *Le travail **dépend** du chemin parcouru*

*Energie mécanique plus conservée ⇒ le système est soumis à une force **«non-conservative»***

La variation d'énergie mécanique correspond au travail de la force de frottement W' :

$W' = (E_c + E_p)_B - (E_c + E_p)_A$ avec $W' < 0 \Rightarrow$ perte d'énergie vers l'extérieur

6.7. Force non-conservative

Exemple 1 : cas d'une force de frottement sec

Un bloc est lancé sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$. Il subit une force de frottement sec $\overrightarrow{F_f}$. Quelle distance L parcourt-il avant de s'arrêter ?

$$Etat\ initial : E_i = E_{c,i} + E_{p,i} = \frac{1}{2} m v_0^2 + 0$$

$$Etat\ final : E_f = E_{c,f} + E_{p,f} = 0 + mg\,h = mg\,L \sin\alpha$$

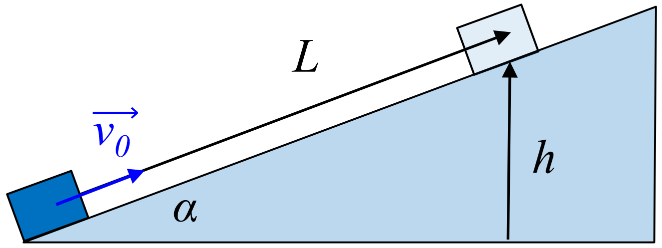
$$Travail\ de\ la\ force\ de\ frottement : W' = \int_0^L \overrightarrow{F_f} \cdot d\vec{x} = -L\,F_f$$

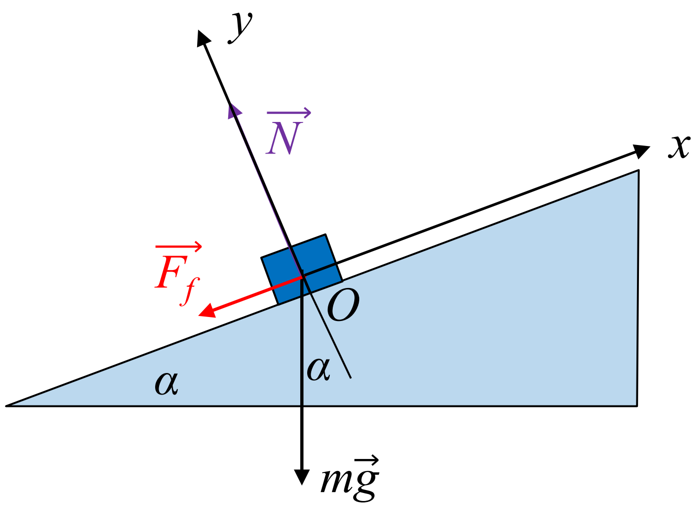
$$E_f - E_i = W' = -L\,F_f = -L\,\mu_d N$$

$$2^{nde}\ loi\ de\ Newton\ sur\ Oy : 0 = N - mg\cos\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha$$

$$E_f - E_i = mg\,L\sin\alpha - \frac{1}{2} m v_0^2 = -L\,\mu_d\, mg\cos\alpha$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mgL\,(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha) \Rightarrow L = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha)}$$

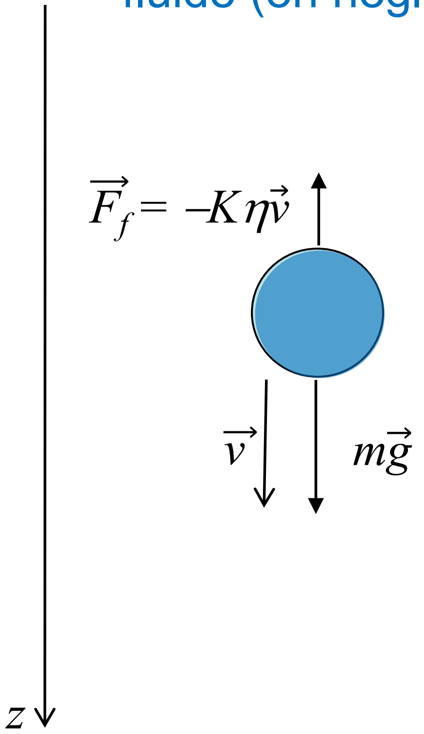




6.7. Force non-conservative

■ Exemple 2 : cas d'un frottement fluide

On s'intéresse à la chute libre d'un objet dans un fluide en tenant compte de la force de frottement fluide (on néglige ici la poussée d'Archimède)



$\vec{F}_f = -K\eta\vec{v}$: force de frottement fluide

<u>Energie dissipée</u> = travail de la force de frottement

$$\delta W' = -K\eta\vec{v}\cdot d\vec{l} = -K\eta\, v\, dl$$

avec $dl = vdt$ soit $\delta W' = -K\eta\, v\, vdt = -K\eta\, v^2\, dt$

$\delta W'$ est le travail élémentaire effectué par la force de frottement pendant dt

La variation d'énergie mécanique sur un intervalle de temps dt est égale à l'énergie dissipée par la force de frottement fluide :

$$dE = \delta W' = -K\eta\, v^2\, dt$$

Ou encore $\boxed{\dfrac{dE}{dt} = -K\eta v^2}$

Puissance instantanée dissipée

On remarque que celle-ci varie comme le carré de la vitesse

Consommation moyenne	17,6 kWh/100km	21,1 kWh/100 km
Vitesse compteur	114 km/h	135 km/h

6.8. Force conservative

Hors programme

Si $\vec{F}$ est une force conservative alors elle possède les propriétés suivantes :

$W_{\mathcal{L}_1} = W_{\mathcal{L}_2}$ *Le travail ne dépend pas du chemin parcouru*

$\oint \delta W = 0$ *Le travail est nul sur une trajectoire fermée*

$W = -(U_f - U_i)$ *$U(r)$ est une fonction appelée « potentiel »*

$$\boxed{\vec{F}(r) = -\frac{dU(r)}{dr}\vec{e}_r}$$

On dit que la force dérive d'un potentiel $U(r)$

$\frac{\partial}{\partial x}$: *signifie « dérivée partielle » par rapport à x*

exemple:
$f(x,y) = 2x+3y-1$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2$ *et* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3$

Cette écriture est correcte si F ne dépend que d'une seule variable. L'écriture générale est :

$$\vec{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial U(r)}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial U(r)}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,U(r) = -\nabla\,U(r)}$$

$\overrightarrow{grad}$: gradient

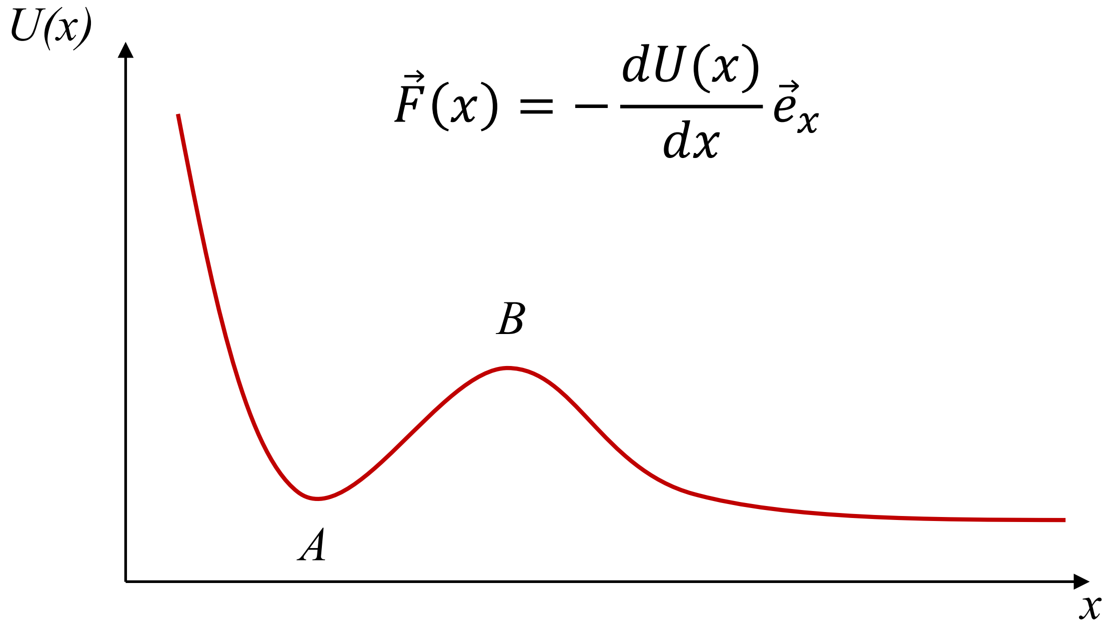
Opérateur nabla ∇ *ou* $\vec{\nabla}$

$\nabla: \ \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$

6.8. Force conservative

Energie potentielle, force, et position d'équilibre

Hors programme



$$\vec{F}(x) = -\frac{dU(x)}{dx}\vec{e}_x$$

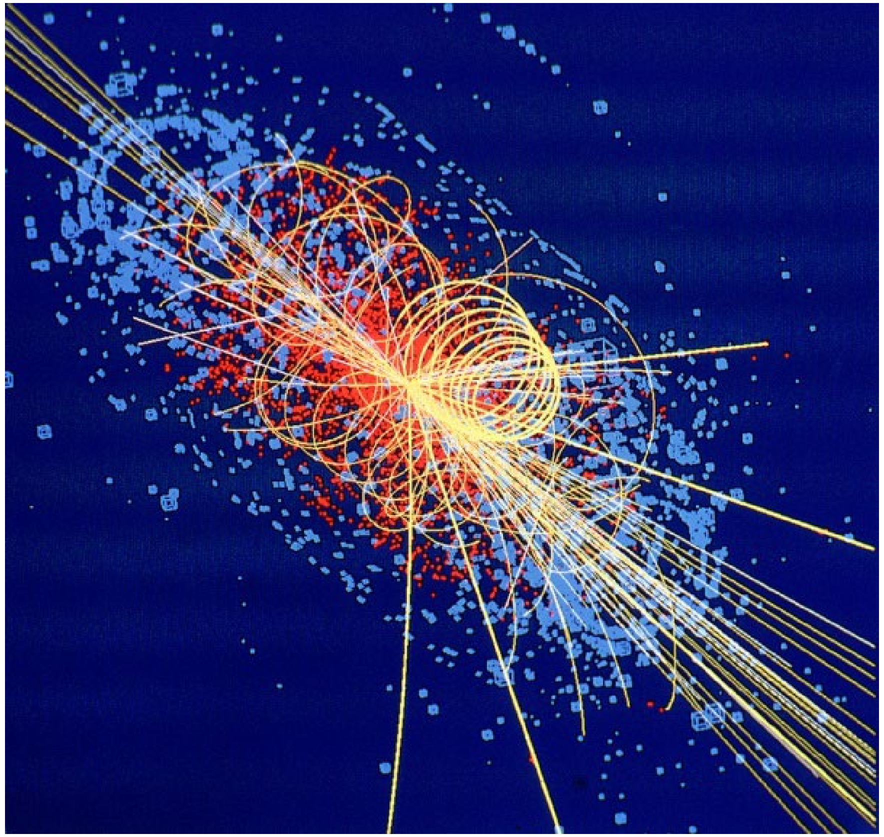
La dérivée de la fonction *U(x)* étant nulle en *A* et *B*, la force y est donc nulle

$\Rightarrow$ ces points correspondent à une position d'équilibre

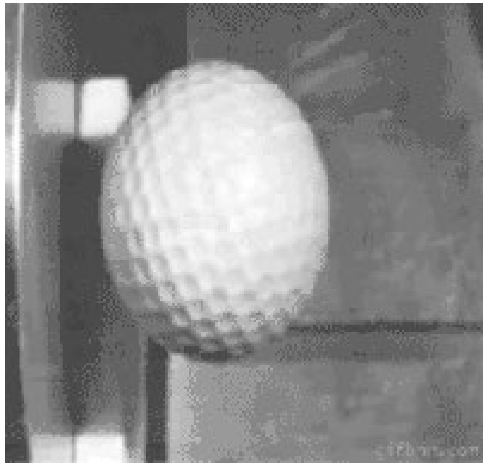
A représente un minimum de la fonction *U(x)* : c'est une position d'équilibre stable

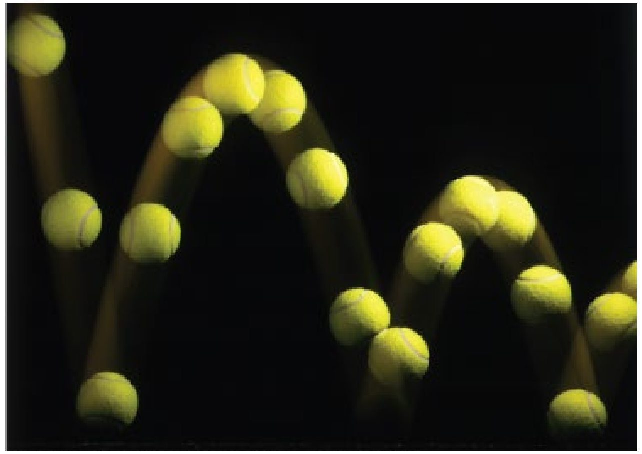
B représente un maximum de la fonction *U(x)* : c'est une position d'équilibre instable

7. Chocs

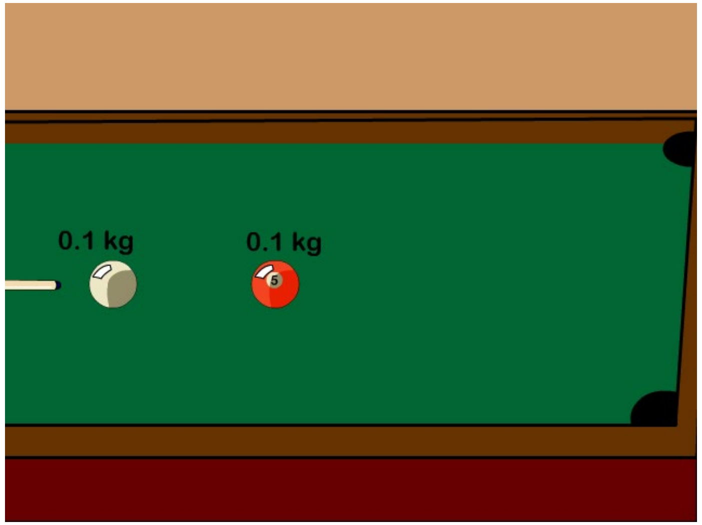


Collision de protons formant quatre muons dans une simulation au détecteur CMS (Image : CMS/CERN)



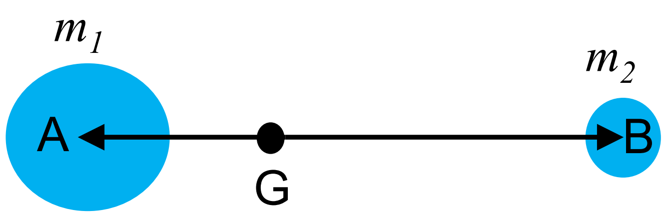


Richard Megna/Fundamental Photographs

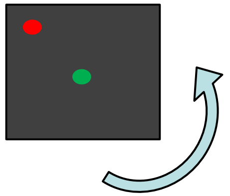


7.1. Centre de masse

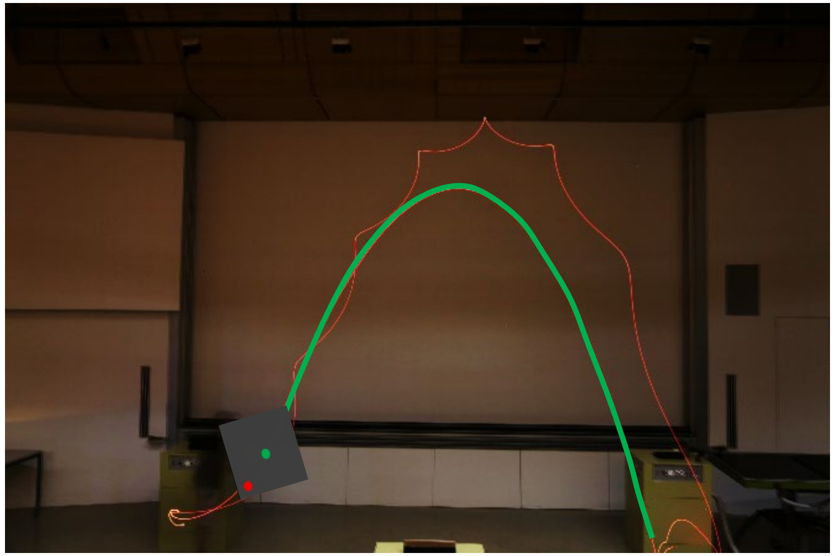
■ Définition du centre de masse



$$m_1\,\overrightarrow{GA} + m_2\,\overrightarrow{GB} = (m_1+m_2)\overrightarrow{GG} = \vec{0}$$



● *Centre de masse*



Trajectoire du centre de masse : ——

Trajectoire d'un point de l'objet : ——

Définitions générales :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i$$

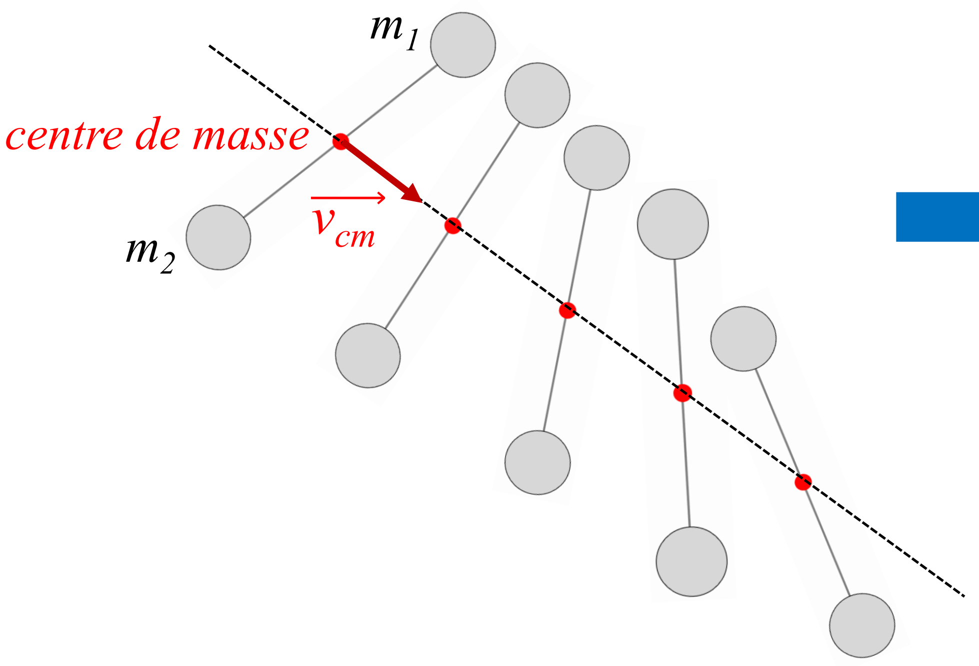
$$\textit{avec}\quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

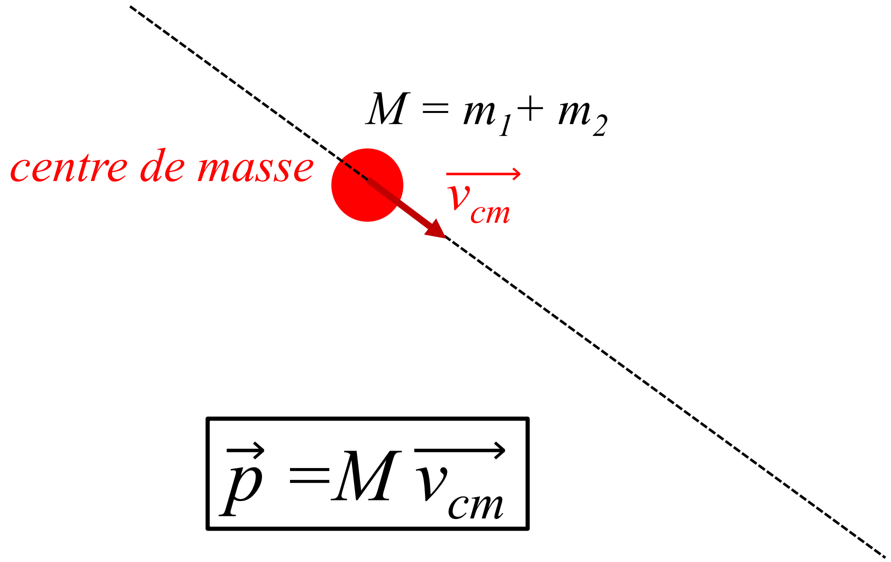
<u>Rem</u> : le centre de masse sera défini plus en détail au chapitre 10

7.1. Centre de masse

■ Référentiel lié au centre de masse (cm)

Quantité de mouvement d'un système de particules : $\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3} + \ldots = \sum_i \vec{p_i}$





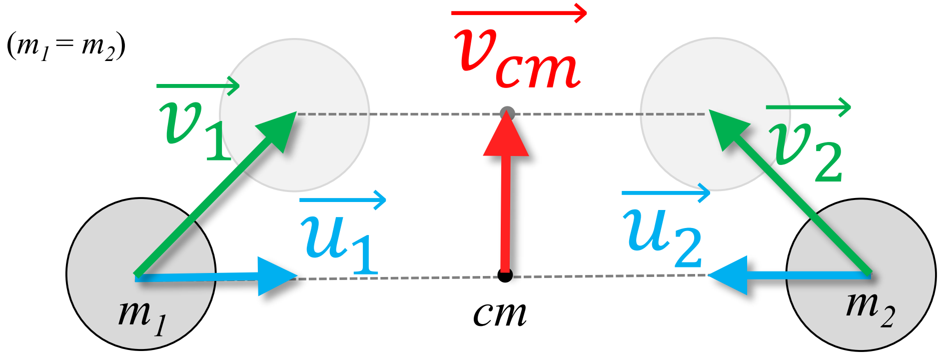
$$\boxed{\vec{p} = M\,\vec{v_{cm}}}$$

La quantité de mouvement de deux particules est la somme des quantités de mouvement de chaque particule. C'est aussi la quantité de mouvement du système constitué par les deux particules de masse $M = m_1 + m_2$ se déplaçant à la vitesse du centre de masse v_{cm}.

7.1. Centre de masse

■ Référentiel lié au centre de masse (cm)

Soit le système formé des masses m_1 et m_2, s'il n'y a pas de forces externes (ou somme nulle) alors le centre de masse (cm) du système se déplace en ligne droite à la vitesse v_{cm}.



$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$: vitesses dans le référentiel du laboratoire

$\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$: vitesses dans le référentiel du cm

Relations entre vecteurs "vitesse" :

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{v_{cm}}$$
$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{v_{cm}}$$

Vitesse du cm dans le référentiel "laboratoire"

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{r_i}$$

$$\frac{d\overrightarrow{r_{cm}}}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1 \frac{d\overrightarrow{r_1}}{dt} + m_2 \frac{d\overrightarrow{r_2}}{dt}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{v_{cm}} = \frac{m_1 \overrightarrow{v_1} + m_2 \overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2}}$$

Vitesse du cm dans le référentiel "Centre de masse" (R_{cm})

$$\overrightarrow{r_{cm,R_{cm}}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{r_{i,R_{cm}}} = \vec{0}$$

car l'origine du référentiel R_{cm} est le cm

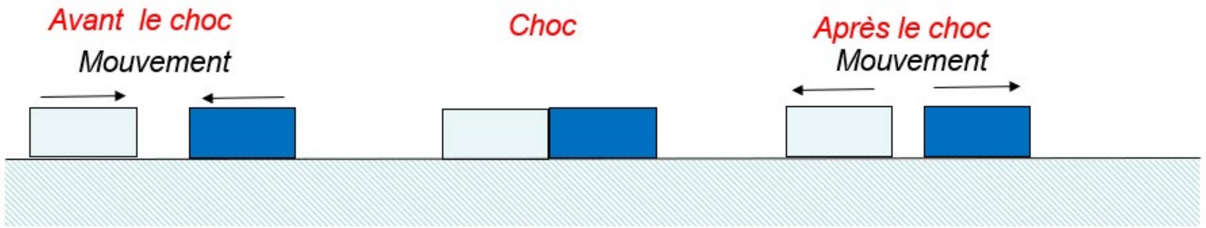
$$\frac{d\overrightarrow{r_{cm,R_{cm}}}}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1 \frac{d\overrightarrow{r_{1,R_{cm}}}}{dt} + m_2 \frac{d\overrightarrow{r_{2,R_{cm}}}}{dt}\right) = \vec{0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{u_{cm}} = \frac{m_1 \overrightarrow{u_1} + m_2 \overrightarrow{u_2}}{m_1 + m_2} = \vec{0}} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = -\frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{u_2}$$

Rem : les masses sont constantes

7.2. Chocs élastiques

■ Conditions :



Condition 1 (C1) : Conservation de la quantité de mouvement

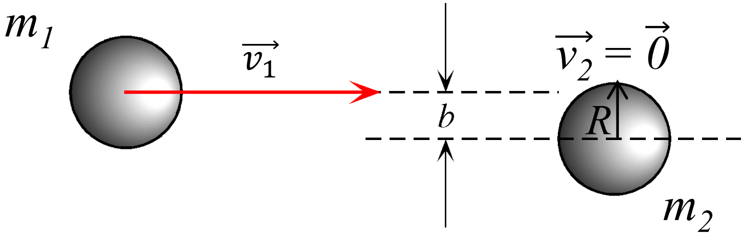
$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2} \qquad \textit{relation vectorielle}$$

Condition 2 (C2) : Conservation de l'énergie cinétique

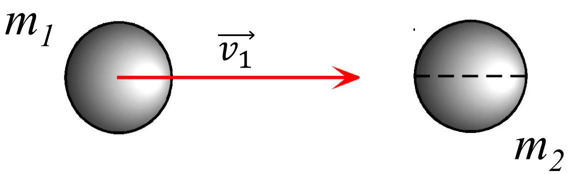
$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2$$

ou encore $$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2}$$

7.2. Chocs élastiques



Exemple 1 : $m_1 \neq m_2, \vec{v_2} = \vec{0}$, $b=0$ (choc frontal)



(C1) $\vec{p_1} = \vec{p'_1} + \vec{p'_2}$ ou encore $\vec{p'_2} = \vec{p_1} - \vec{p'_1}$

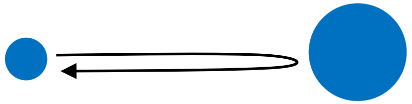
soit $p'^2_2 = (\vec{p_1} - \vec{p'_1})^2 = p_1^2 + p'^2_1 - 2\vec{p_1}\,\vec{p'_1} = p_1^2 + p'^2_1 - 2p_1 p'_1 \cos\theta$ avec $\cos\theta = 1$ ($b=0 \Rightarrow \vec{p_1}$ et $\vec{p'_1}$ colinéaires)

(C2) $$\frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2} = \frac{p_1^2}{2m_1}$$

$$\frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p_1^2 + p'^2_1 - 2p_1 p'_1}{2m_2} = \frac{p_1^2}{2m_1}$$

$$\boxed{p'^2_1\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) + p_1^2\left(\frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_1}\right) - \frac{p_1 p'_1}{m_2} = 0}$$

Cas particulier : si $m_2 >> m_1$ ⇨ $\frac{p'^2_1}{2m_1} - \frac{p_1^2}{2m_1} = 0$

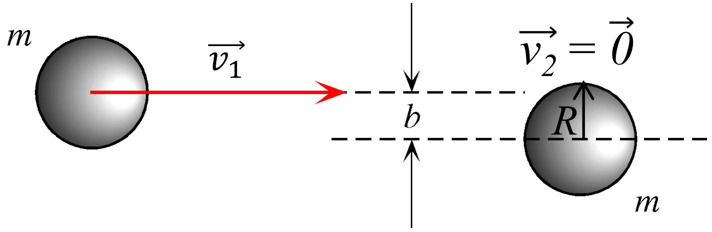


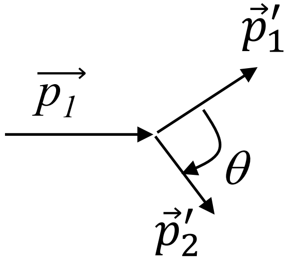
⇨ $\vec{p'_1} = -\vec{p_1}$

(solution $\vec{p'_1} = \vec{p_1}$ pas physique car équivalente à pas de choc)

7.2. Chocs élastiques

Exemple 2 : $m_1 = m_2 = m$ et $\vec{v_2} = \vec{0}$, $b \neq 0$





Quel est l'angle θ ?
pour $0<b<2R$

Le paramètre b définit le point d'impact. Si b=0, le choc est frontal et les billes auront des vecteurs vitesses colinéaires après le choc. Si b>2R, alors il n'y a pas de choc.

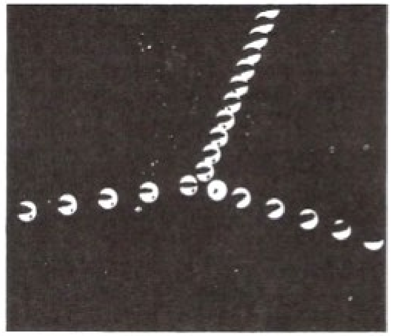
(C1) $\vec{p_1} = \vec{p'_1} + \vec{p'_2} \Rightarrow \vec{p_1}^2 = (\vec{p'_1} + \vec{p'_2})^2 = p'^2_1 + p'^2_2 + 2\vec{p}_1'\vec{p}_2' = p'^2_1 + p'^2_2 + 2\,p'_1 p'_2 \cos\theta$

(C2) $p_1^2 = p'^2_1 + p'^2_2$ (car $m_1 = m_2$ et $E_c = p^2/2m$)

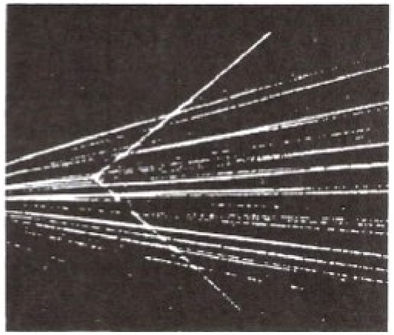
$d'où\ p'^2_1 + p'^2_2 + 2\,p'_1 p'_2 \cos\theta = p'^2_1 + p'^2_2 \Rightarrow 2p'_1 p'_2 \cos\theta = 0$

ou encore $\vec{p'_1} \cdot \vec{p'_2} = 0$ soit $\boxed{\vec{v'_1} \cdot \vec{v'_2} = 0}$

Les vecteurs vitesses sont perpendiculaires



boules de billard



noyaux d'hélium

Les balles ont des directions perpendiculaires après le choc

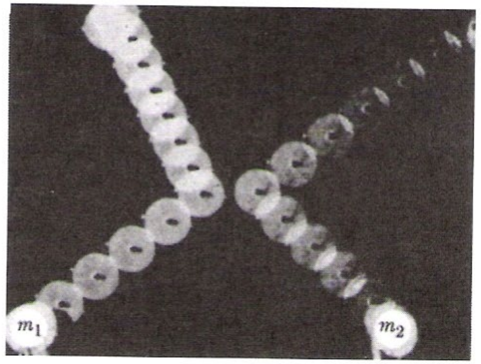
http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/chocs2D.html

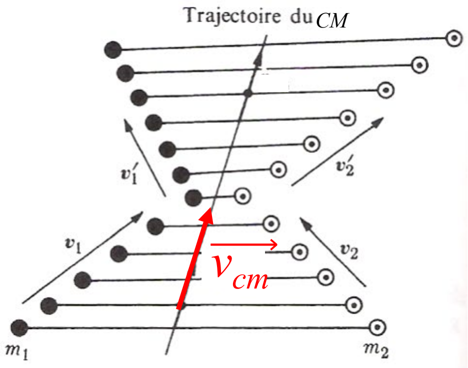
7.2. Chocs élastiques

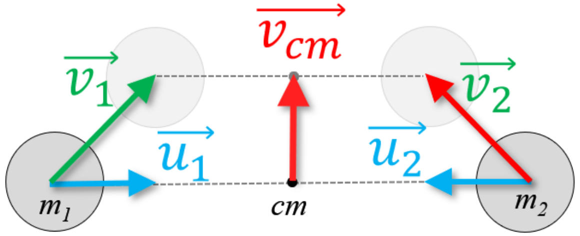
Exemple 3 : $m_1 \neq m_2$, $\vec{v_2} \neq \vec{0}$, $\vec{v_1} \neq \vec{0}$

Calcul des vitesses $\overrightarrow{v'_1}$ et $\overrightarrow{v'_2}$ après le choc

Pour la démonstration, on peut se placer dans le référentiel lié au centre de masse







$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{u_1} &= \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_{cm}} \\ \overrightarrow{u_2} &= \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_{cm}} \\ \overrightarrow{u'_1} &= \overrightarrow{v'_1} - \overrightarrow{v_{cm}} \\ \overrightarrow{u'_2} &= \overrightarrow{v'_2} - \overrightarrow{v_{cm}} \end{aligned}}$$

Nous avons dans le référentiel du cm :

$$m_1\overrightarrow{u_1} + m_2\overrightarrow{u_2} = m_1\,\overrightarrow{u'_1} + m_2\,\overrightarrow{u'_2} = (m_1+m_2)\overrightarrow{u_{cm}} = \vec{0}$$

avec $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$: vitesses des balles <u>avant le choc</u>

$\overrightarrow{u'_1}, \overrightarrow{u'_2}$: vitesses des balles <u>après le choc</u>

Et la vitesse du centre de masse dans le référentiel du laboratoire est :

$$\overrightarrow{v_{cm}} = \frac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1+m_2}$$

http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/chocs2D.html

7.2. Chocs élastiques

Exemple 3 : *suite…*

Nous avons donc dans le référentiel lié au *cm*

(C1) $m_1\overrightarrow{u_1} + m_2\,\overrightarrow{u_2} = m_1\,\overrightarrow{u'_1} + m_2\,\overrightarrow{u'_2} = \vec{0}$

⇨ $\boxed{m_1\,\overrightarrow{u_1} = -m_2\overrightarrow{u_2}}$ *et* $\boxed{m_1\overrightarrow{u'_1} = -\,m_2\overrightarrow{u'_2}}$

(C2) $\frac{1}{2}m_1\,u_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\,u_2{}^2 = \frac{1}{2}m_1\,u'_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\,u'_2{}^2$

On introduit (C1) dans (C2): $m_1\,u_1{}^2 + \frac{m_1{}^2}{m_2}\,u_1{}^2 = m_1\,u'_1{}^2 + \frac{m_1{}^2}{m_2}\,u'^2_1$

d'où $u'_1{}^2 = u_1{}^2$ ⇨ $\overrightarrow{u'_1} = -\,\overrightarrow{u_1}$

et $u'_2{}^2 = u_2{}^2$ ⇨ $\overrightarrow{u'_2} = -\,\overrightarrow{u_2}$

car choc frontal dans le référentiel du cm (b=0)

Si $\overrightarrow{u'_1} = \overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u'_2} = \overrightarrow{u_2}$ ⇨ pas de choc

$\boxed{\overrightarrow{u'_1} = -\,\overrightarrow{u_1} \quad et \quad \overrightarrow{u'_2} = -\,\overrightarrow{u_2} \quad \Rightarrow \text{choc élastique}}$

7.2. Chocs élastiques

Exemple 3 : *suite...*

Choc élastique : $\overrightarrow{u'_1} = -\overrightarrow{u_1}$ *et* $\overrightarrow{u'_2} = -\overrightarrow{u_2}$

or $\overrightarrow{u'_1} = \overrightarrow{v'_1} - \overrightarrow{v_{cm}} \Rightarrow \overrightarrow{v'_1} = \overrightarrow{u'_1} + \overrightarrow{v_{cm}} = -\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{v_{cm}} = -\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_{cm}}$

avec $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_{cm}}$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{\overrightarrow{v'_1} = \frac{(m_1 - m_2)\overrightarrow{v_1} + 2m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2} \qquad \overrightarrow{v'_2} = 2\overrightarrow{v_{cm}} - \overrightarrow{v_2} = \frac{(m_2 - m_1)\overrightarrow{v_2} + 2m_1\overrightarrow{v_1}}{m_1 + m_2}}$$

avec $\overrightarrow{v_{cm}} = \dfrac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2}$